宏观经济学笔记

ElegantLaTeX 版本

作者：滑翔闪

组织：ElegantLaTeX Program

时间：March 20, 2026

ElegantLaTeX Program

在历史视野中思考增长的意义

目录

第一章 前言

人们一旦开始思考经济增长问题，就不会考虑其他问题了

——Robert Lucas

宏观经济学诞生在凯恩斯时期。在新古典失效时，凯恩斯注意到了新古典价格自由变动的局限，并建立了一种**总量分析**的方法。**但这个时期的宏观经济学缺乏一种微观基础，也没有合适的数学方法论**。凯恩斯时期的模型后面被纳入静态分析层面。

首先出现的宏观方法革新论文是 solow(QJE,1956)模型————从那时开始，宏观出现了经济增长的方向。

经济为什么要增长？经济是怎么增长的？时间被纳入模型分析，**宏观分析从静态模型转向了动态模型**。要素贡献和经济增长的源泉被联系到了一起，solow 残余的分解带来了更多的疑问。

但是 solow 模型存在的一个局限是，其很多假设和凯恩斯的模型一样，模型是**先验性**的。先验意味着直接基于直觉进行建模。此时的宏观依旧缺乏一种微观基础，凭借直觉将储蓄作为了核心变量。缺乏微观经济学那样基于理性的演绎逻辑。以供求理论例子，微观经济学构建了一种**理性人的最优化范式**:

- 消费者，需求，偏好，效用函数，需求函数。
- 生产者，技术，生产函数，供给函数。

比较重要的，综合了微观基础的是 ramsey 模型。通过家庭层面的最优化继续演化，模型将储蓄内生化，**为宏观提供了微观基础**，也基本成为了未来宏观经济学的基底模型。

然而即便宏微观基础同时具备，ramsey 模型还有有一个问题——ramsey 模型是**确定性的模型**。以物理思想为例子，由于粒子微观层面存在量子效应 (不确定性)，预测由基本粒子构成的宏观活动存在一种理论上的困难。理想的宏观建模需要包含一些不确定性的要素进而能解释未曾料到的外生冲击。

继续将**不确定性**纳入宏观模型，DSGE 范式出现并壮大了。典型代表就是真实周期模型 (kydland & prescoff ,1982,Econometrica)。

从此以后，经济增长和经济波动成为宏观经济学最重要的主题。

就数学表达而言，当代宏观经济学依赖微分方程、差分方程，以时间为基本单位，存在**连续和离散**两种表达。**一般情况下，连续的表达可以和离散的表达相互转换**。例如 $\int x_t dt$ 和 $\sum x_t$ 想要表达的本质别无二致。连续就使用积分，使用微分方程，表达简洁，但遗憾的是**大部分微分方程实际上难以求解**，例如三体运动，公式刻画简单，但难以求得优美的通解。最遗憾的情况往往是：研究者构建了一个相当简洁优雅的动态方程，却无法真正求解。离散变量虽不够简洁，但在实践中便于当代的计算机迭代计算。

或许正是数学工具的极限，导致了宏观经济学当前的困境。事实上，在教材上为人们所熟知的宏观经济学基本为几十年前的宏观模型，前沿研究永远比高级宏观的教材更加遥远，甚至可以说，**掌握教材和研究几乎没有关系**。在解释上，除去当前主流的基于微分方程、控制最优化的宏观经济学外，**制度、文化经济学**等非主流、非传统模型的经济增长研究也在不断涌现。

很多人说，宏观经济学就是跳大神。冒出来一个点子，被现实打脸，然后缝缝补补就是一个新点子。在漫长的经济增长时中，波动和增长的未解之谜永无答案，宏观的大一统模型似乎和物理的大一统一样成为一种遥不可及的理想。但在没有答案的混沌之中，或许就和干中学模型一样，即便距离最终答案依旧很远，但存在着许多内生增长的奇思妙想。

第二章 LS-LM

2.1 学习背景与推荐教材

就学习难度来说，最基础的宏观经济学是曼昆的《经济学原理》，属于经济学概念科普阶段。

之后是曼昆的《宏观经济学》。由于曼昆是一个凯恩斯主义者，这个版本的教材侧重于 LS-LM 模型。John R. Hicks 在《Mr. Keynes and the "Classics"; A Suggested Interpretation》论文中模型化了凯恩斯的经济理论。

但是需要注意的是，凯恩斯自己从未直接回应过这篇论文。所以**不能说 LS-LM 就代表了凯恩斯的理论**。晚年，hiks 自己在文章《IS-LM: An Explanation》中文中强调:

IS-LM 模型不应被视为完全代表凯恩斯主义的体系，而只是特定条件下的一种静态比较工具。

真正的中级宏观大概是 williamson 版本 的宏观经济学，里面积极引入了 RBC 的基础知识，数理化倾向更加明显。再之后便是以 romer 为代表的一系列高级宏观经济学教材。一般宏观教材会在离散和连续模型中选择一种方式进行介绍，但也有两种方式都进行介绍的，例如《现代经济增长导论》。宏观方法论的书也不少，甚至可以说，博士课常开的方法论课往往都是为宏观做准备，例如《动态经济学方法》、《经济动态的递归方法》。

相较于初级教材使用图像的表达，这部分将从**更一般的视角**看待 IS-LM 模型，关键是将其作为一种**静态比较**的分析工具[1]。实际上，基于模型的假设不同，IS-LM 同样可以用来表达新古典的经济理论。

2.2 封闭模型

IS-LM 假定了两个市场，分别是产品市场 (IS) 和货币市场 (LM)。

产品市场:

$$Y = C(Y) + I(r) + G$$

货币市场:

$$\frac{M\text{名义价格}}{P\text{实际价格}} = m(r, Y)\text{货币需求}$$

凯恩斯加入了一些假设:

- 边际消费倾向递减：$0 < C'(Y) < 1$。
- 借贷成本：$I'(r) < 0$。
- $\frac{\partial m}{\partial r} < 0$
- $\frac{\partial m}{\partial Y} > 0$

✍ **练习 2.1 你觉得这个假设对吗** 谈谈前面的假设

收入越多，消费越多这个假设一般没有问题 ($MC > 0$)，但是现在越来越多的实证证据表明，递减未必 $MC < 1$。但是如果这个假设成立，可以给我们一种新的启发。

为什么要共同富裕？难道西方经济学理论就没有共同富裕的消费基础吗？答案之一就藏在消费倾向当中。在满足消费倾向递减的假设下，贫富差距过大的结果就是消费不足。网上很多说要撬动富人消费，但如果这个假设成立，富人实际上看似消费的绝对值多，其消费倾向实际上是比较小的[2]。

---

[1]对于主流宏观研究而言，动态分析才是主流，若是以研究为目的，一般不必在比较静态上花费太多时间。

[2]想象下，穷人 10 块钱花费 5 块，可是富人 100 块才花费 20 块，绝对值看起来大，消费占比总体却变少了。更具体的证明是：假设 ΔY 的财

借贷成本的关系：利率 r 就是银行利息，M 简单理解可以看作愿意持有的现金。银行利息越高，存款动机越强，现金量就越少。

以及 m 和 Y，r 的反应，实际上在现实中，m 和 Y，r 的反应充满了不确定性。

练习 2.2 常见的考题 分析扩张财政的影响。

解 [扩张财政的影响] 这里不使用绘图，而使用更一般的代数表达。

第一步：全微分，将 IS-LM 模型全微分

$$\begin{cases} dY = C'(Y)dY + I'(r)dr + G' \\ \frac{1}{P}dM - \frac{M}{P^2}dP = m_r dr + m_y dy \end{cases}$$

第二步：矩阵变换

$$\begin{pmatrix} 1 - C'(Y) & -I'(r) \\ m_Y & m_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dG \\ \frac{1}{P}dM - \frac{M}{P^2}dP \end{pmatrix}$$

第三步：本质分析

我们要求的是财政政策 G 对经济增长的影响，本质就是求解 $\frac{dY}{dG}$ 和 $\frac{dr}{dG}$。

现在一共有五个变量 Y, r, G, M, P。

求解需要其他变量保持不变，也就是 $dM = dP = 0$。变形可以得到：

$$\begin{pmatrix} 1 - C'(Y) & -I'(r) \\ m_Y & m_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dY}{dG} \\ \frac{dr}{dG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

第四步，求解

接下来使用克莱姆法则 (Cramer's Rule) 来求解内生变量：

引理 2.1 (克莱默法则)

对于一个包含 n 个变量和 n 个方程的线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，若其系数矩阵 A 的行列式 $\det(A) \neq 0$，则该方程组有唯一解。其解向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 中的每个分量可表示为：

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

其中，A_i 是将矩阵 A 的第 i 列替换为常数项向量 $\mathbf{b}$ 后形成的矩阵。

在二元线性方程组的特殊情况下：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

其解为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{2.3}$$

可以解得

富从穷人转移给了富人，分别用 L 和 H 表示高低消费倾向，也就是穷人和富人的消费倾向。此时有 $\Delta C = \Delta Y \times MPC_H - \Delta Y \times MPC_L = \Delta Y \times (MPC_H - MPC_L)$

$$\begin{cases}\frac{dY}{dG}=\frac{m_r}{m_r[1-c'(Y)]+m_Y I'(r)}\\ \frac{dr}{dG}=\frac{m_Y}{m_r[1-c'(Y)]+m_Y I'(r)}\end{cases}$$

第五步，分析符号

直接使用之前的假设，可以发现 $1-c'(Y)$ 是一个 0 到 1 范围的常数。由于 $m_r<0, m_Y>0$。可以得到 $\frac{dY}{dG}>0$ 和 $\frac{dr}{dG}<0$。

定义 2.1 (比较静态分析)

比较静态分析的分析范式就是分析外生变量改变对内生变量对影响。

外生变量：就是系统外部的变量，一般包含两种情况：1、系统直接给定 2、常数值。

在凯恩斯假设环境下的 IS-LM 中，G 就是那个外生变量。实际上，由于计算时需要保持其他变量不变，此时在前面的求解中，M,P 也被看作了外生变量。

内生变量：系统内部的变量，在凯恩斯假设环境下的 IS-LM 中，Y,r 就是那个内生变量。

引理 2.2 (静态模型和比较静态分析)

一般而言，静态模型只能使用比较静态分析。如果使用的比较静态分析，一般也是静态模型。动态模型一般只有处于均衡状态时，才会退化为静态模型，然后可以使用比较静态分析。

练习 2.3 如何使用上述过程理解财政政策失灵？ 提示: 其实就是解释 $\frac{dY}{dG}=0$

解 [重新理解财政政策失灵] 求解如下：

由于之前已经获得了解：

$$\begin{cases}\frac{dY}{dG}=\frac{m_r}{m_r[1-c'(Y)]+m_Y I'(r)}\\ \frac{dr}{dG}=\frac{m_Y}{m_r[1-c'(Y)]+m_Y I'(r)}\end{cases}$$

可以再进行变形，得到

$$\frac{dY}{dG}=\frac{1}{[1-c'(Y)]+\frac{m_Y}{m_r}I'(r)}$$

显然，要使得其解趋于 0，最终意味着 $m_r\longrightarrow 0$。也就是货币需求对利率不再敏感。

这也就回到了凯恩斯流动性陷阱。

所以从代数式子的角度来看，整个宏观假设环境的作用过程相较于几何展示会更加自然。

2.3 重新理解 IS-LM

教材上横坐标似乎总是 r 和 Y，为什么呢？例如，是否可以更换成 G 呢？

目前教材在介绍 IS-LM 模型时，坐标轴为 r 和 Y，原因是因为他们使用了凯恩斯的假设，此时 Y 和 r 是内生变量。

练习 2.4 重新理解 IS-LM 想象时刻

想象一下，假设亚当斯密活在当代，并且接触到了 IS-LM 模型，他会怎么重新思考坐标参考系？

解 [亚当斯密的想象] 开始分析

首先我们要理解 IS-LM 方程的本质：

用两个方程，描述两个市场，对应了两个内生变量，然后剩下所有变量看作外生变量。

那么亚当斯密首先想到的内生变量是什么呢？看不见的手。对于亚当斯密这个古典经济学启蒙者来说，价格自然是内生变量。其通过看不见的手灵活调控。同时价格对应的就是产品市场。

接下来要思考的问题是，货币市场的内生变量是什么？一看《就业、利息、货币通论》就知道，利息是内生变量。

基于整个变量池子：Y, P, r, G, M, 我们诞生了下面这个模型设计：

$$\begin{cases} \text{内生变量：} P, r \\ \text{外生变量：} G, M, Y \end{cases}$$

什么?! 这样一看，Y 这个经济增长变量居然是外生给定的？真的可能吗？

原因在于，在古典经济学假定下，市场万能，价格灵活调整总是趋于最优，自然 Y 也就总是处于最优的 $\bar{Y}$ 状态。

再让我们回到凯恩斯的想象。如果古典经济学是对的，市场价格灵活变动，那为什么有这么多的非自愿失业？显然是上述模型的哪里出问题了，Y 不再是最优的，那么 Y 需要从外生变量变为内生变量。

关键是内生变量只有两个坑 (两个方程，两个市场)，P 和 r 哪一个变量替换成外生变量呢？

于是凯恩斯发现了价格刚性，把 P 拿了下来，变成了以下模型：

$$\begin{cases} \text{内生变量：} Y, r \\ \text{外生变量：} G, M, P \end{cases}$$

回过头来看，站在这样的视角看亚当斯密到凯恩斯的转变，过程也就变得自然亲切了。

综上, **IS-LM 模型只是一个分析工具，从来不是凯恩斯模型的专利**。当别人问你 IS-LM 模型时，我们的第一反应应该是：我们即将在哪种假设下进行分析？古典还是凯恩斯？

练习 2.5 如何使用上述过程理解货币政策？ 提示: 其实就是解释 $\frac{dY}{dm}, \frac{dr}{dm}$

解 [求解货币政策] 同理，可以解得

$$\begin{cases} \frac{dY}{dm} = \frac{\frac{1}{P} I'(r)}{m_r[1-c'(Y)]+m_Y I'(r)} > 0 \\ \frac{dr}{dm} = \frac{\frac{1}{P}[1-c'(Y)]}{m_r[1-c'(Y)]+m_Y I'(r)} < 0 \end{cases}$$

注[比较静态分析] 比较静态分析非常适合计量的简约式。

2.4 开放经济

在当代，开放经济学其实有专门的一只研究方向——开放宏观。对于一个做开放宏观的博士生来说，其毕业论文层次往往是，写一个小国开放模型，写一个大国开放模型，写一个多国开放模型。

Mundell (1963) 将 IS–LM 模型扩展到开放经济框架，分析了在固定汇率与浮动汇率制度下财政政策与货币政策的有效性。Fleming (1962) 几乎同时提出了类似的开放经济 IS–LM 框架，因此该模型通常被称为 **Mundell–Fleming 模型**。

开放经济就是在封闭经济的基础上加入了进出口。

IS:

$$Y = C(Y) + I(r) + G + NX(e\frac{P^*}{P})$$

其中 $e\frac{P^*}{P}$ 为直接标价法，例如一美元能换 n 单位人民币。当 $e\frac{P^*}{P}$ 上升，也就是 n 变多，意味着本币 (人民币) 贬值，出口上升。此时可以得到 $NX'(\cdot) > 0$。

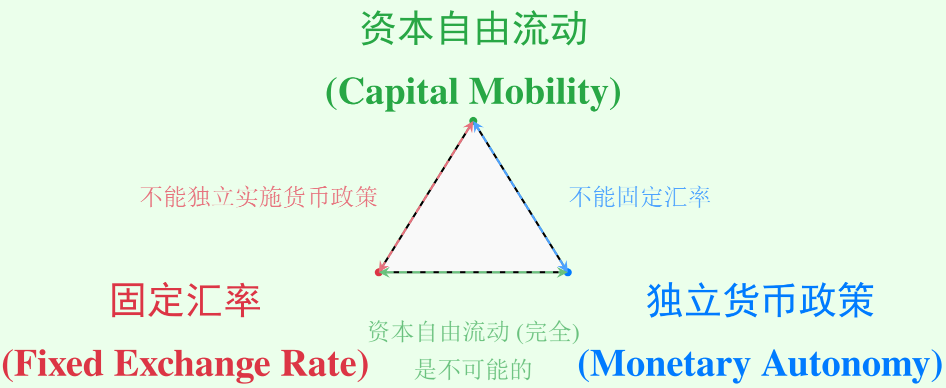
LM：

$$\frac{M}{P} = m(r, Y)$$

此时再分类讨论。

如果是小国，基本意味着资本完全自由流动 $r = r^*$。大国开放，资本不完全流动。

2.4.1 重新理解不可能三角形



定义 2.2 (独立的货币政策)

独立的货币政策，意味着可以自己给定一些货币的参数，那么对应的 m 就是外生的。同理，放弃货币独立，货币政策就是内生变量。 ♣

对于小国而言 ($r^* = r$)：

假设实施固定汇率制，也就是放弃了独立货币政策，此时 m 就是内生变量，e 就是外生变量。

$$\begin{cases} \text{内生变量：} m, Y \\ \text{外生变量：} e, \cdots \end{cases}$$

假设实施浮动汇率制，也就是保持独立货币政策，此时 m 就是外生变量，e 就是内生变量。

$$\begin{cases} \text{内生变量：} e, Y \\ \text{外生变量：} m, \cdots \end{cases}$$

可以对比观察到，对于小国而言，浮动汇率和固定汇率其实就是汇率 e 和独立货币政策 m 的取舍。

可其本质到底是什么呢？

本质就是，资本、汇率、货币政策相当于 Y、e、m 有三个变量。如果想要满足三个都同时可以调控，就得有三个内生变量，也就是至少有三个市场，三个方程描述这三个市场。然而 IS-LM 只有两个市场和方程！如果想要使得 Y、e、m 同时内生，那么要违背的就是 $r = r^*$ 的假设，而这个假设的含义正是资本自由流动。

所以本质上，不可能三角形就是 e, r, m **三个变量与两个市场**的矛盾。

2.5 AS-AD

IS-LM 并不是最强大的模型，在经济学中，AS-AD 模型更加完善。

实际上，IS-LM 方程联立求解，解出的只是 AS-AD 中的 AD 需求端。这也是因为**凯恩斯的分析框架是侧重需求端的分析框架**。

因此，我们可以继续扩展 IS-LM，使得其向 AS-AD 靠近，不断地加东西。

首先给出 **AD 端**：

也就是 IS 有三个方程：

1、$C = C(Y)$

2、$I = I(r)$

3、$Y = C + I + G$

然后是 LM

4、$m(r, Y) = \frac{M}{P}$

接下来是 **AS 端**，可以尝试扩展出一些市场：

5、假设使用常见的生产函数 $Y = F(K, L)$

6、扩展劳动力需求市场：$\frac{W}{P} = F_L(K, L)$

7、扩展劳动力供给市场：$L^S = Q(\frac{W}{P})$

利用 AS-AD 的 6 和 7 相当于在 IS-LM 基础上进一步刻画了劳动力市场。再将劳动力市场和生产函数结合，就有了 **AS** 端。

练习 2.6 思考 思考此时有七个内生变量，可以是哪七个？提示：根据古典和凯恩斯的假设不同，7 个内生变量可以是不同的七个内生变量。

解 [思考题] 此时全部变量有：

$$Y, r, M, P, L, W, G$$

且为了简化模型，此时资本是外生给定，固定不变。

对于亚当斯密来说，价格由于自由变动，充满弹性，因此是内生性的，涉及到价格的 P,r,W 就变成了内生变量。

由于前面这种变量是内生变量，由他们推导出的 I,L 也是内生变量，最终 Y 也就变成了内生变量。

最终，加入劳动力市场后，亚当斯密的想象如下：

$$\begin{cases} \text{内生变量：} G, m, K \\ \text{外生变量：} Y, M, P, L, W, G, r \end{cases}$$

接下来是凯恩斯的想象，凯恩斯的观察是，亚当斯密时期存在非自愿失业，因此他要解释的核心现象是劳动力市场不均衡。也就是 L 被拆分成了供给端和需求端，且不满足均衡。

$$N = L^S - L^Q > 0$$

$$\begin{cases} \text{内生变量：} \\ \text{外生变量：} PorW\text{两者中选择其一为刚性} \end{cases}$$

为了解释，凯恩斯引入了价格刚性或者工资刚性。但是请注意，在此处模型中，工资刚性和价格刚性并不能同时满足。例如如果 W,P 同时为刚性，那么 m 就变成了外生变量。因此，此时模型外生变量和内生变量的变动很灵活。

需要注意到的本质是，凯恩斯自己并没有直接提出过所谓价格刚性、工资刚性的理论，这是凯恩斯为了解释非自愿失业设定的假设。价格刚性，或者更柔和的粘性，其实是后来者沿着凯恩斯思路研究的各自现象，例如曼昆的经典论文探讨了菜单成本。

在凯恩斯早期的模型中，$m(r,Y)=\frac{M}{p}$ 是一个简单粗暴的假设。现代的实证证据表明，货币相关的函数实际上非常不稳定。现代宏观往往通过构建微观基础将货币部分内生化进行处理。

第三章 solow 模型

3.1 求解动态路径

前面的静态模型固定了资本 k。变为动态模型。将不再固定 k。此时首先需要一个技术函数 $Y = F(K, L)$，然后通过 K 对变动研究 Y 的增长和波动。

第一步，给出一个生产函数，也就是技术的微观基础：

$$Y = F(K(t), L(t))$$

定义 3.1 (新古典生产函数)

早期宏观动态模型使用的生产函数为新古典生产函数，例如中级教材中典型的科夫道格拉斯生产函数就是典型代表，这类函数具有以下假设 (特征)：

- 非负性。$F(K, L) \geqslant 0$。非负性隐含了更多假设，例如 $F(K, 0) = F(0, L) = 0$。这意味着 K 和 L 是互补的生产要素[a]。
- 单调性。$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0$(L 同理)。这意味着边际产出非递减。
- 齐次性。对于 $\forall \lambda > 0, \lambda Y = F(\lambda K, \lambda L)$。意味着规模报酬不变。
- 凹凸性。$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial^2 k} < 0$(L 同理)[b]。二阶导小于 0，其实就是边际报酬递减[c]。
- 极限定义。也叫 **inada** 条件。$\lim_{k \to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \lim_{L \to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = +\infty$。这个极限假设代表着资源的稀缺性。可以对称地想到，$\lim_{k \to +\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \lim_{L \to +\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0$。

[a] 其实直觉上也是，如果是替代关系，那么完全可以简化为 F(K) 或者 F(L)

[b] 凹凸性判断的方式多种多样，以高中抛物线函数和中级微观的风险偏好特征为例子，比较 $f(tx+(1-t)y) t f(x)+(1-t)f(y)$ 也是种方式

[c] 数学和经济学关于凹凸的定义往往相反。在一般数学教材中，凸为二阶导小于 0，在一般经济学教材中，凹才为二阶导小于 0

♣

宏观经济学的论文范式为数学假设，经验事实 (描述统计的证据)，分析推断。当我们看一个论文时，可以尝试思考论文的假设是否合理，如果放松了某个假设会怎么样？或者改进某个假设，使其更加符合现实。

命题 3.1 (solow 模型店基本假设)

solow 模型有如下假设[a]：

- 生产函数为新古典生产函数。
- 资本通过储蓄动态积累，且储蓄率固定为 s。
- 劳动供给不带弹性。
- 人口增长率为固定为 n。

[a] 可以感受到这些假设都是非常简化的假设

♠

对**资本动态积累假设**来说，资本 K 是存量，投资 I 为流量[1]，且均衡条件有资本等于储蓄：I=S。solow 模型在早期最创新的核心贡献之一就是通过 $S \longrightarrow I \longrightarrow K$ 建立了一套动态框架。

对劳动供给不带弹性来说，意味着 $L = \varphi P (0 < \varphi < 1)$。其中 L 为劳动力数量，P 为人口数量，自然 φ 为劳动参与率。

[1] 现在的财经新闻很多不严谨的地方在于弄混了存量和流量。例如美国前 n 家上市公司超过某国 GDP，实际上市值是存量，GDP 却是流量，不能这样比较。

接下来补充下**动态分析的数学表达**:

流量，对应时期的增长量可以表达为：

$$\dot{x} = \frac{\partial X(t)}{\partial t}$$

增长率则是增长量除以当期存量：

$$g_x = \frac{\dot{X}}{X}$$

实际上，增长率也可以看作 $g_x = \frac{\partial LnX}{\partial t} = \frac{\dot{X}}{X}$。

结合**劳动供给不带弹性**的假设来说，以上表达可以进一步表达劳动力和人口的关系：$n = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{P}}{P}$

接下来基于微分方程，探讨资本积累的运动方程，设 δ 为资本折旧率，那么可以得到：

$$\dot{K} = I - \delta K = sY - \delta K = sF(K, L) - \delta K$$

此时，solow 模型有两以下方程：

$$\begin{cases} \dot{K} = sF(K, L) - \delta K \\ \frac{\dot{L}}{L} = n \\ K(0), L(0) \end{cases}$$

此时模型中的所有变量都是总量，需要进行**人均化的标准化处理**。从**经济意义**的角度上来说，人均标准化是为了可比性，例如发展中国家发达国家标准比的是人均 GDP 而不是 GDP 总量。从**技术角度**上来说，两个微分方程的难度等价于一个两阶的微分方程。标准化有助于整合方程组，降低处理难度。

此时有 $k = \frac{K}{L}$。直接对 k 用时间求导，可以得到：

$$\dot{k} = \frac{\partial \frac{K}{L}}{\partial t} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

接下来代入 $\dot{K} = I - \delta K = sY - \delta K = sF(K, L) - \delta K$[2]=f(k)，即可得到

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k$$

为方便求解，此处进一步简化假设，也就是让折旧为 0($\delta = 0$)。此时求解 k 也就是求解以下微分方程：

$$\begin{cases} \dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k \\ k(0) = \frac{K(0)}{L(0)} \end{cases}$$

再简化，使得生产函数为 $f(k) = Ak$，因此有

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k = \frac{dk}{dt} = (SA - n)k$$

化简变形可得 $\frac{\frac{1}{k}}{dk} = (SA - n)dt$, 解微分方程，进行积分 $\int \frac{1}{k} dk = \int (SA - n)dt$。

可以得到 $k = Ce^{(SA-n)t}$。其中 C 是积分得到的任意常数。然后再代入 $k(0) = \frac{K(0)}{L(0)}$ 求解任意常数即可解得。

注[关于例子中放松的假设] 前面的题是否满足了 solow 模型的假设？

[2]利用一次齐次的性质，可以得到 $\frac{F(K,L)}{L} = \frac{F(\frac{K}{L},1)}{L}$=F(k,1)

在前面的例子中，为更好解题，此处大幅度简化了生产函数，使其为最简单的形式 $f(k) = Ak$。但是请注意，$f(k) = Ak$ **并不满足新古典生产函数的假设**，其不满足 **inada 条件**：

$\lim_{k\to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \lim_{L\to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = +\infty$。这个极限假设代表着**资源的稀缺性**。同理，$\lim_{k\to +\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \lim_{L\to +\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0$。

经济学家们觉得，虽然 AK 模型不满足新古典假设，但现实有一些数据表明存在类似 AK 模型的情况，这也就是**内生增长**获得诺奖的论文系列工作，其中一篇经典论文为 romer 的《Increasing Returns and Long-Run Growth》。

3.2 求解稳态和黄金律

推论 3.1 (稳态和黄金率)

前面求得的是 solow 模型的动态路径，也就是一般解。在中级宏观中，一般只要求求稳态解和黄金率水平。这里简要回顾下：

类似马尔萨斯人口论，人多了，平均财富下降，生育率就低，人少，平均财富增加，生育率提升。最终人口规模维持在一个稳定的状态。solow 模型最后也是收敛到一个稳态。

由于 AK 模型违背了新古典假设，所以存在内生增长，他的动态路径是不稳定的，这里使用符合新古典生产函数的简化模型，也就是 $f(k) = k^{\alpha}$。

稳态 k 求解思路很简单，直觉上就是增长率为 0，资本长期稳定在当前存量，也可以看作收敛到当前存量，也就是

$$\dot{k} = 0 = sk^{\alpha} - (n+\delta)k$$

解得

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

由于储蓄率外生，固定储蓄率后，资本最终就会收敛到一个稳态，因此便可以通过调整储蓄率来调控经济。**资本黄金率**就是使得每单位有效劳动的消费水平达到最大化时的资本存量水平。

由 k 的稳态，可以反过来表示 $s = (n+\delta)k^{*(1-\alpha)}$。

由于有 $c^* = y - s^*y$，先代入 $s = (n+\delta)k^{*(1-\alpha)}$，再对 k 求导，得到 $\alpha k^{*(\alpha-1)} - (n+\delta) = 0$。

黄金率的本质含义为 $f'(k^*) = (n+\delta)$：生产函数的斜率等于持平投资的斜率。

3.3 中央计划和分散的 solow 模型

定义 3.2 (宏观经济的两种资源配置方式)

在宏观经济模型中，资源配置通常可以通过两种基本组织形式来实现：

$$\begin{cases} \text{中央计划者经济 (social planner)，简写 SP} \\ \text{分散经济 (decentralized economy)，简写 DE} \end{cases}$$

- 中央计划者经济：假设一位“全知全能”的中央计划者直接进行各自决策。是理论最优的经济情况，这种最优来源于完全信息的前提假设。因为完全信息，中央计划者形式的宏观模型往往更简洁。
- 分散经济：经济由多个不同主体组成，不同主体通过自己的信息决策，最后在市场上形成均衡。类似的，分散经济往往代表着每个主体只具有部分信息。

注[比较计划经济和中央计划经济] 中央计划经济是否是计划经济？并不是。因为计划经济失败了，而中央计划经济应该是；理论最优水平。中央计划经济成为理论最优的关键在于——信息完全。

推论 3.2 (DE 到 SP 的论文范式)

由于 SP 模型往往是理论上的最优模型 (信息完全)，在宏观论文中，往往就会先写一个 SP 模型衡量理论最优的社会水平，然后再写一个刻画现实的 DE 模型。

接下来，假设实施了一个可选的政策 (optional policy)。再分析实施这个政策后，DE 模型社会水平提升了多少，如果提升到了和 SP 一样的水平，那么这个政策就是最优的 **(First Best)**。如果没有达到 SP 水平，但至少改进了，那么政策就是较优的 **(Second Best)**[a]。

[a]实际上微观经济学理论模型的范式也是类似的，先刻画一个基准值，然后改变参数，研究相对基准值的偏离并进行解释。例如完全竞争和垄断社会福利。

前面的 solow 模型其实就是一个**中央计划者经济模型**。政策制定者知道社会的全部参数，然后最优化储蓄率水平，使得社会水平达到最优。这里继续扩展，尝试刻画一个**分散经济**的 solow 模型。

分散模型具有多个市场主体，且各个主体会基于自己的部分信息进行决策，这里构架家庭和企业端：

家庭端 (household):

采用类似的资本积累方程 $\dot{A} = s(rA + wL)$。A 代表银行储蓄，r 代表利率。L 为劳动力，w 为当期工资水平。

同样，利用 $a = \frac{A}{L}$, 进行求导，可以得到:

$$\dot{a} = \frac{\partial \frac{A}{L}}{\partial t} = \frac{\dot{A}L - A\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{A}}{L} - an = (ra + w)a - na$$

企业端 (enterpreneur):

企业本身就有理论最大化的决策场景，

$$\max F(K, L) - wL - Kr$$

其一阶条件为 $r = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}, w = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$[3]。

此时关系为 $k = \frac{K}{L}$, 也就是 $F(K, L) = Lf(k)$。

接下来解 r 和 w。

$$r = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \frac{\partial Lf(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial K} = f'(k)$$

[3]这里企业基于利润最大化做最优化，放到动态模型中，就是企业在每一期都做最优化，因此把动态模型转化成了均衡状态的静态分析。在现在的经济研究中，更符合学界标准的是考虑公司的**跨期最优化**，甚至要考虑未来，对未来的利润进行贴现处理。沿着这个思路继续推导，还可以推导**菲利普斯曲线**，例如Calvo (1983)的论文。这里不再展开。

$$w=\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\frac{\partial Lf(k)}{\partial L}=\frac{\partial Lf(k)}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial L}+\frac{\partial Lf(k)}{\partial f(k)}\frac{\partial f(k)}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial L}=f(k)+Lf'(k)\left(-\frac{k}{L}\right)=f(k)-kf'(k)$$

最终有了以下方程：

$$\begin{cases}\text{家庭}\begin{cases}\dot{a}=(ra+w)a-na\\ a(0)\end{cases}\\ \text{企业}\begin{cases}r=f'(k)\\ w=f(k)-kf'(k)\end{cases}\end{cases}$$

接下来有均衡条件 $A=K\Longleftrightarrow a=k$

将所有式子代入均衡条件，进行转化，可以发现，最后转化的结果为

注[宏观模型的简化] 如何判断自己的模型结果是否为最简洁的形式了，直截了当的检查方式就是，一个一个检查，是否用到了所有的模型方程和均衡条件。当所有的方程和均衡条件都被用到，那么一般这时候就是模型最简的形式。

$$sf(k)-nk=\dot{k}$$

可以发现在前面设定的情况下，DE 模式的 solow 模型和 SP 模式的 solow 模型是一样的，也就是理论左右。原因其实在于目前的分散模型并没有加入信息不对称等复杂的现实摩擦，设置非常简洁。

第四章 下一章

可参考 高级宏观经济学笔记 (Romer 版)